國立勤益科技大學101學年度研究所碩士班招生筆試試題卷

所別： 機械工程系碩士班　　　　　　　　組別：

科目： 工程數學

准考證號碼：□□□□□□□□（考生自填）

考生注意事項： 考試時間 100 分鐘。

試題一：〈15 分〉

解微分方程式 $x - xy - y' = 0$.

試題二：〈15 分〉

判斷$1+(3x-e^{-2y})\dfrac{dy}{dx}=0$是否為正合微分方程式,若不是則利用積分因子求通解。

試題三：〈15 分〉

以 Laplace Transform 解 $y''+y=t$； $y(0)=1,\quad y'(0)=-2$.

試題四：〈15 分〉

求矩陣 A=$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$之特徵值與特徵向量。

試題五：〈20 分〉

求解一維熱方程式$T(x,t)$。 $\dfrac{\partial T}{\partial t}=2\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ $\quad t>0, 0<x<\pi$ ；

B.C: $T(0,t)=0, T(\pi.t)=0$, I.C: $T(x,0)=50\sin x$

試題六：〈20 分〉

計算$\oint_c \dfrac{\cos(z)}{z^2-1}dz$ ＝？ 其中 C 是逆時針的封閉路徑 $|z|=\dfrac{1}{2}$

1. $x - xy - y' = 0$

解：$\frac{dy}{dx} = x - xy$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = x(1-y)$

$\Rightarrow \frac{dy}{1-y} = x\,dx$

$\Rightarrow -\ln(1-y) \cancel{=} x^2 + C$

$\Rightarrow \underline{\underline{1-y^2 = e^{-(x^2+C)}}}$

或 $\underline{\underline{1-y^2 = Ae^{-x^2}}}$

1. 求解 $1+(3x-e^{-2y})\frac{dy}{dx}=0$

化成 $dx+(3x-e^{-2y})dy=0$

令 $M=1$ $\quad N=3x-e^{-2y}$

$\frac{\partial M}{\partial y}=0 \neq \frac{\partial N}{\partial x}=3$ 故為非正合 O.D.E

求其積分因子:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{M}=\frac{-3}{1}=-3$$

故 $I=e^{-\int -3dy}=e^{3y}$

原式 $\times I \Rightarrow$ $e^{3y}+(3xe^{3y}-e^{y})dy=0$

檢查是否為正合 O.D.E

$$\frac{\partial(e^{3y})}{\partial y}=3e^{3y}=\frac{\partial(3xe^{3y}-e^{y})}{\partial x}=3e^{3y}$$

故為正合 O.D.E

故其通解 $u(x,y)=c$

$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{3y}$ $\therefore u=xe^{3y}+h(y)$

$\frac{\partial u}{\partial y}=3xe^{3y}-e^{y}$ $\therefore u=xe^{3y}-e^{y}+g(x)$

故 $h(y)=-e^{y}$

$g(x)=0$

通解 $u(x,y)=xe^{3y}-e^{y}=c$

2. $y'' + y = t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$

解:

$$(s^2 + 1)Y(s) - s + 2 = \frac{1}{s^2}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{3}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow y(t) = t + \cos(t) - 3\sin(t)$$

4、 $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 之特徵值和特徵向量

特徵方程式 $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 & 3 \\ 0 & 4-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(4-\lambda)(1-\lambda) = 0$

故 $\lambda = 1、3、4$

$\lambda_1 = 1 \Rightarrow X_1$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $\rightarrow 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{7}{2}$

$\rightarrow x_2 + 2x_3 = 0$ 令 $x_3 = 1$ 則 $x_2 = -2$

故 $X_1 = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 3 \Rightarrow X_2$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$

$0 \cdot x_1 + 5x_3 + 3x_2 = 0$ 故 x_1 為任意數 令 $x_1 = 1$

$x_2 + 6x_3 = 0$ $\therefore x_2 = 0$

$\therefore -2x_3 = 0$ $\therefore x_3 = 0$

故 $X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda_3 = 4 \Rightarrow X_3$ $\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right]$

$-x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0$ $\therefore x_1 = 5x_2$ 令 $x_2 = 1$ $x_1 = 5$

$x_3 = 0$

$\therefore x_3 = 0$

故 $X_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

7. $\frac{\partial T}{\partial t}=2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ $t>0,\ 0<x<\pi$

B.C : $T(0,t)=0$, $T(\pi,t)=0$

I.C : $T(x,0)=50\sin x$

解：令 $T(x,t)=F(x)G(t)$ 代入

整理：$\frac{F''}{F}=\frac{\dot{G}}{2G}=-p^2$

$\therefore F''+p^2F=0$ $\xrightarrow{\text{解出}}$ $F_n=\sin nx$ （而 $p=n$）

由 B.C $F(0)=F(\pi)=0$

再解 $\dot{G}-2n^2G=0 \longrightarrow G_n=A_ne^{-2n^2t}$

故 $T(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_ne^{-2n^2t}\cdot\sin nx$

代入I.C $T(x,0)=50\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin nx$

比較係數 $n=1$ $A_1=50$

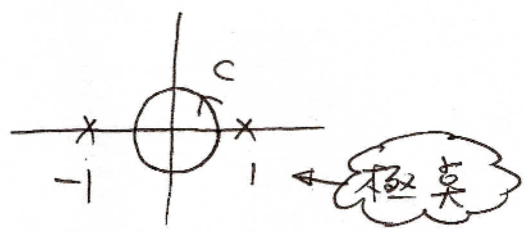
$n\neq1$ $A_n=0$

故 $\underline{\underline{T(x,t)=50e^{-2t}\cdot\sin x}}$

試題6

6.
$$\oint_C \frac{\cos(z)}{z^2-1}\,dz$$

$$= \oint_C \frac{\cos(z)}{(z-1)(z+1)}\,dz$$



$\underline{\underline{=0}}$ *因爲路徑 C 所包圍的區域是解析的。