國立勤益科技大學 101 學年度研究所碩士班招生筆試試題卷

所別：冷凍空調與能源系　　　　　　　組別：

科目：工程數學

准考證號碼：□□□□□□□□（考生自填）

考生注意事項： 一、考試時間 100 分鐘。 二、不可使用電子計算機。 三、無計算過程者，不予給分。

試題一：〈 20 分〉

解微分方程式 $y' + (y-1)\cos x = 0$。

試題二：〈 20 分〉

試判斷微分方程式 $(3x^2 + 4xy)\,dx + (2x^2 + 2y)\,dy = 0$

（1）是否為正合（Exact）微分方程式（5％）　　（2）求通解（15％）。

試題三：〈 20 分〉

解微分方程式 $xy' - 2y = x^3 \cos 4x$。

試題四：〈 20 分〉

以未定係數法（Method of Undetermined Coefficient）求解 $y'' - 3y' + 2y = e^{3x} + 4x$。

試題五：〈 20 分〉

以拉普拉斯法求解 $y''(t) + 4y(t) = 0,\ \ y(0) = 2,\ \ y'(0) = 2$。

試題六：〈 20 分〉

若 $f(x) = x + 2\pi$，$-\pi \le x \le \pi$，$f(x + 2\pi) = f(x)$，求 $f(x)$之傅立葉級數。

試題七：〈 20 分〉

求過曲面 $2xz^2 - 3xy - 4x = 7$ 上點 $P(1, -1, 2)$的切平面方程式。

試題八：〈 20 分〉

已知$\vec{\mathrm{A}}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}, \vec{B}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$，求同時正交（Orthogonal）$\vec{A}, \vec{B}$ 之單位向量。

試題九：〈 20 分〉

已知$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$之特徵值分別為$\lambda_1$，$\lambda_2$，$\lambda_3$，求$\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1=$？

試題十：〈 20 分〉

設矩陣$A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$，求矩陣 A 的反矩陣A^{-1}。

國立勤益科技大學101學年度研究所碩士班招生筆試　答案卷

所別：冷凍空調與能源系　　　　組別：

科目：工程數學

無計算過程者，不予給分。

試題一：〈 20 分〉

解微分方程式 $y'+(y-1)\cos x=0$。

解：$\dfrac{dy}{dx}+(y-1)\cos x=0,\ \ dy=-(y-1)\cos x dx,\ \ \dfrac{dy}{y-1}=-\cos x dx,\ \ \ln|y-1|=-\sin x+c$

$y-1=Ae^{-\sin x}$，$y=1+Ae^{-\sin x}$。

試題二：〈 20 分〉

試判斷微分方程式 $(3x^2+4xy)\,dx+(2x^2+2y)\,dy=0$

（1）是否為正合（Exact）微分方程式（5％）　（2）求通解（15％）。

解：（1）因為 $\dfrac{\partial(3x^2+4xy)}{\partial y}=4x,\ \ \dfrac{\partial(2x^2+2y)}{\partial x}=4x$ 為正合微分方程式

（2）通解 $\phi(x,y)=\int(3x^2+4xy)dx+f(y)=x^3+2x^2y+f(y)$

$\phi(x,y)=\int(2x^2+2y)dy+g(x)=2x^2y+y^2+g(x)\qquad f(y)=y^2,\ \ g(x)=x^3$

故通解為 $x^3+2x^2y+y^2=c$#

試題三：〈 20 分〉

解微分方程式 $xy'-2y=x^3\cos 4x$。

解：$y'-\dfrac{2}{x}y=x^2\cos 4x$

$I(x)=e^{\int-\frac{2}{x}dx}=\dfrac{1}{x^2}$

$y(x)=\dfrac{1}{I}\left(\int I\cdot x^2\cos 4x\,dx+c\right)=x^2\left(\dfrac{1}{4}\sin 4x+c\right)$

試題四：〈 20 分〉

以未定係數法（Method of Undetermined Coefficient）求解 $y''-3y'+2y=e^{3x}+4x$。

解：(1) $r^2-3r+2=0,\ \ r=2,\ 1,\ \ y_h(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{x}$

(2) 令 $y_p(x)=Ae^{3x}+Bx+C$， $y_p'(x)=3Ae^{3x}+B,\ \ y_p''(x)=9Ae^{3x}$

$$9Ae^{3x}-9Ae^{3x}-3B+2Ae^{3x}+2Bx+2C=e^{3x}+4x,\ \ A=\frac{1}{2},\ \ B=2,\ \ C=3$$

$$y_p(x)=\frac{1}{2}e^{3x}+2x+3$$

(3) $y(x)=y_h+y_p=C_1e^{2x}+C_2e^{x}+\frac{1}{2}e^{3x}+2x+3$ #

試題五：〈 20 分〉

以拉普拉斯法求解 $y''(t)+4y(t)=0,\ \ y(0)=2,\ \ y'(0)=2$。

解：$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+4Y(s)=0,\ \ s^2Y(s)-2s-2+4Y(s)=0,$

$$s^2Y(s)+4Y(s)=2s+2,\ \ Y(s)=\frac{2s+2}{s^2+4},$$

$$y(t)=2\cos 2t+\sin 2t \ \#$$

試題六：〈 20 分〉

若 $f(x)=x+2\pi$，$-\pi\le x\le\pi$， $f(x+2\pi)=f(x)$，求 $f(x)$之傅立葉級數。

解：令 $F(x)=x$，$-\pi\le x\le\pi$，且 $F(x+2\pi)=F(x)$，$F(x)$為一奇函數。

因為 $F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$，其中 $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}$，

所以 $F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$，

故 $f(x)=x+2\pi=F(x)+2\pi=2\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$。

試題七：〈 20 分〉

求過曲面 $2xz^2-3xy-4x=7$ 上點 $P(1,-1,2)$ 的切平面方程式。

解：令 $f(x,y,z)=2xz^2-3xy-4x-7$，

$$\nabla f\Big|_{(1,-1,2)}=\left[\left(2z^2-3y-4\right)\vec{i}-3x\,\vec{j}+4xz\,\vec{k}\right]\Big|_{(1,-1,2)}=7\,\vec{i}-3\,\vec{j}+8\,\vec{k}\text{，}$$

所以切平面方程式為 $7(x-1)-3(y+1)+8(z-2)=0$，

$7x-3y+8z=26$。

試題八：〈 20 分〉

已知 $\vec{A}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k},\ \vec{B}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$，求同時正交（Orthogonal）$\vec{A},\vec{B}$ 之單位向量。

解：令 $\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=-4\,\vec{i}+\vec{j}+5\,\vec{k}$，

所求之單位向量為 $\vec{n}=\dfrac{\vec{C}}{\left|\vec{C}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{42}}\left(-4\,\vec{i}+\vec{j}+5\,\vec{k}\right)$ 或 $\vec{n}=\dfrac{1}{\sqrt{42}}\left(4\,\vec{i}-\vec{j}-5\,\vec{k}\right)$。

試題九：〈 20 分〉

已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}$ 之特徵值分別為 λ_1，λ_2，λ_3，求 $\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1=$？

解：$\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-1$。

試題十：〈 20 分〉

設矩陣 $A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ 1 & -2 & -3\\ -1 & 1 & -3\end{bmatrix}$，求矩陣 A 的反矩陣 A^{-1}。

解：$A^{-1}=\dfrac{1}{20}\begin{bmatrix}9 & -2 & 5\\ 6 & -8 & 10\\ -1 & -2 & -5\end{bmatrix}$。