# 中立型隨機非線性擾動系統之新延遲相關均方指數穩定準則
# A New Delay-Dependent Mean Square Exponential Stability Criterion for Stochastic Nonlinear Perturbed Systems with Neutral-Type

**楊明憲**
**Ming-Sheng Yang**

建國科技大學電機工程系
Department of Electrical Engineering,
Chienkuo Technology University
E-mail:yms@ctu.edu.tw

## 摘要

本文旨在分析中立型隨機非線性擾動系統之均方強健指數穩定度測試問題。藉由加權延遲參數方法、參數模型轉換技巧、李亞普諾-克羅斯威斯基泛函數及Itô微分法則，針對上述系統，提出新延遲相關均方強健指數穩定測試準則。文中所提準則也可用於遲滯型隨機延遲系統的穩定度測試。本文所得之結果可省去解李亞普諾方程式或李卡第方程式。最後，舉例證實本研究方法明顯改善文獻結果。

**關鍵字詞：**中立型隨機非線性擾動系統，均方強健指數穩定度，加權延遲參數方法，參數模型轉換，Itô微分法則。

## Abstract

The purpose of this paper is to analyze the problem of mean square robust exponential stability test for stochastic nonlinear perturbed systems with neutral-type. By using weighting-delay-parameter approach, parameterized model transformation technique, Lyapunov-Krasovskii functional and Itô differential formula, a new delay-dependent criterion is derived in order to guarantee the mean square robust exponential stability of the above systems. The proposed stability criterion is also used for testing the stability of stochastic delay systems with retarded-type. The obtained result in this paper does not need the solution of Lyapunov equation or Riccati equation. Finally, two examples are used to show the less conservative result of the proposed approach compared with the previous one.

**Keywords:** Neutral-type stochastic nonlinear perturbed systems, mean square robust exponential stability, weighting-delay-parameter approach, parameterized model transformation, Itô differential formula.

## 1. 前言

事實上，電路中由熱噪音而產生的隨機電壓，可視為是零均值的高斯隨機序列。此外，電路中的電容與電感等元件儲存和釋放能量需要一些時間，使得電路中存在時間延遲現象。近年來，文獻報導都集中在具有遲滯型隨機雜訊延遲系統的穩定度測試準則。然而，關於具有中立型隨機雜訊延遲系統之穩定度測試問題，只有少許文獻提供指數穩定結果。因此，本文之研究動機源自於此。

考慮具有中立型隨機雜訊非線性擾動延遲系統的數學式如下

$$d[x(t)-Gx(t-\tau)]=[Ax(t)+Bx(t-\tau)+f(t,x(t),x(t-\tau))]dt +g(t,x(t),x(t-\tau))]dw(t) \tag{1a}$$

$$x(t)=\phi(t),\quad t\in[-\tau,\ 0] \tag{1b}$$

其中 $x(t)\in R^n$ 為狀態向量；$A$ 及 $B$ 是具有適當維度之常數矩陣。$\tau$ 為正的常數時間延遲項。$w(t)$ 為 $m$ 維向量之Brownian motion定義於機率空間(probability space)。$\phi(t)\in C_{F0}^{b}([-\tau,\ 0];R^n)$ 是初始向量函數。$f:R_+\times R^n\times R^n\to R^n$ 及 $g:R_+\times R^n\times R^n\to R^{n\times m}$ 均為非線性之參數擾動，而其範數是有界的分別如下

$$\|f(t,x(t),(x(t-\tau))\|\le\|K_1x(t)\|+\|K_2x(t)\| \tag{2a}$$

$$\mathrm{Trace}[g^{\mathrm{T}}(t,x(t),x(t-\tau)),g(t,x(t),x(t-\tau))] \le\|K_3x(t)\|^2+\|K_4x(t-\tau)\|^2 \tag{2b}$$

其中 $K_1$，$K_2$，$K_3$，$K_4$ 是具有適當維度之常數矩陣。

**補助定理一[1]**

令 $M$ 及 $N$ 為具有適當維度之實數矩陣，則下列不等式成立

$$M^{\mathrm{T}}N+N^{\mathrm{T}}M\le\delta M^{\mathrm{T}}M+\delta^{-1}N^{\mathrm{T}}N,\quad \delta>0 \tag{3}$$

**補助定理二[2]**

已知純量 $d>0$ 及 $0<\mu<1$，若存在對稱正定矩陣 $X$ 使得下列矩陣不等式成立，

$$\begin{bmatrix} -\mu X + C^{\mathrm{T}}XC & dE^{\mathrm{T}}X \\ dXE & -X \end{bmatrix} < 0 \tag{4}$$

則 $D(y_t)=y(t)+E\int_{t-d}^{t} y(s)ds - Cy(t-h)$ 為穩定。

## 2. 主要結果

**定理一**

已知純量 $\alpha>0$，$0<\rho_1<\rho_2<\rho_3<\rho_4<1$ 及 $0<\mu<1$，並且非線性參數擾動滿足(2)式及時間延遲 $\tau>0$，若存在對稱正定矩陣 $P,\ Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, W, X$ 實數矩陣 $E$ 及正純量 $\beta_1,\ \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 使得下列矩陣不等式成立

$$\begin{bmatrix}
S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & P\bar{B} & \tau\bar{A}^{\mathrm{T}}PE & P & P & 0 & 0 \\
0 & -Q_1+Q_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -Q_2+Q_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -Q_3+Q_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -Q_4+Q_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\bar{B}^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & 0 & 0 & S_2 & \tau\bar{B}^{\mathrm{T}}PE & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\tau E^{\mathrm{T}}P\bar{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau E^{\mathrm{T}}P\bar{B} & -\tau W & 0 & 0 & \tau E^{\mathrm{T}}P & \tau E^{\mathrm{T}}P \\
P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_1 I & 0 & 0 & 0 \\
P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_2 I & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau PE & 0 & 0 & -\tau\beta_3 I & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau PE & 0 & 0 & 0 & -\tau\beta_4 I
\end{bmatrix} < 0 \tag{5a}$$

$$\begin{bmatrix} -\mu X + G^{\mathrm{T}}XG & \tau E^{\mathrm{T}}X \\ \tau XE & -X \end{bmatrix} < 0, \quad P \le \alpha I \tag{5b}$$

則系統(1)式為均方強健指數穩定，其中

$$S_1 = \bar{A}^{\mathrm{T}}P + P\bar{A} + Q_1 + \tau W + \alpha K_3^{\mathrm{T}}K_3 + (\beta_1+\tau\beta_3)K_1^{\mathrm{T}}K_1 \tag{6a}$$

$$S_2 = -Q_5 + (\beta_2+\tau\beta_4)K_2^{\mathrm{T}}K_2 + \alpha K_4^{\mathrm{T}}K_4 \tag{6b}$$

$$\bar{A} = A+E,\quad \bar{B} = B-E \tag{6c}$$

**證明**

藉由加權延遲參數方法與參數模型轉換，選取 Lyapunov-Krasovskii 泛函數如下

$$\begin{aligned}
V(x_t) &= D^{\mathrm{T}}(x_t)PD(x_t) + \int_{t-\rho_1\tau}^{t} x^{\mathrm{T}}(s)Q_1x(s)ds + \int_{t-\rho_2\tau}^{t-\rho_1\tau} x^{\mathrm{T}}(s)Q_2x(s)ds \\
&\quad + \int_{t-\rho_3\tau}^{t-\rho_2\tau} x^{\mathrm{T}}(s)Q_3x(s)ds + \int_{t-\rho_4\tau}^{t-\rho_3\tau} x^{\mathrm{T}}(s)Q_4x(s)ds \\
&\quad + \int_{t-\tau}^{t-\rho_4\tau} x^{\mathrm{T}}(s)\,Q_5x(s)ds + \int_{-\tau}^{0}\int_{t+\theta}^{t} x^{\mathrm{T}}(s)Wx(s)dsd\theta
\end{aligned} \tag{7}$$

其中

$$D(x_t) = x(t) - Gx(t-\tau) + E\int_{t-\tau}^{t} x(s)ds \tag{8}$$

並且 $E$ 為可適當選取之參數矩陣。

根據 Itô 微分法則，infinitesimal operator $LV$ [3] 沿系統(1)式，可得

$$\begin{aligned}
LV(x_t) &= 2D^{\mathrm{T}}(x_t)P[\bar{A}x(t)+\bar{B}x(t-\tau)+f(t,\ x(t),\ x(t-\tau))] \\
&\quad + \mathrm{Trace}[g^{\mathrm{T}}(t,x(t),x(t-\tau))\,P\,g(t,x(t),x(t-\tau))] \\
&\quad + x^{\mathrm{T}}(t)Q_1x(t) - x^{\mathrm{T}}(t-\rho_1\tau)Q_1x(t-\rho_1\tau) \\
&\quad + x^{\mathrm{T}}(t-\rho_1\tau)Q_2x(t-\rho_1\tau) - x^{\mathrm{T}}(t-\rho_2\tau)Q_2x(t-\rho_2\tau) \\
&\quad + x^{\mathrm{T}}(t-\rho_2\tau)Q_3x(t-\rho_2\tau) - x^{\mathrm{T}}(t-\rho_3\tau)Q_3x(t-\rho_3\tau) \\
&\quad + x^{\mathrm{T}}(t-\rho_3\tau)Q_4x(t-\rho_3\tau) - x^{\mathrm{T}}(t-\rho_4\tau)Q_4x(t-\rho_4\tau) \\
&\quad + x^{\mathrm{T}}(t-\rho_4\tau)Q_5x(t-\rho_4\tau) - x^{\mathrm{T}}(t-\tau)Q_5x(t-\tau) \\
&\quad + \tau x^{\mathrm{T}}(t)Wx(t) - \int_{t-\tau}^{t} x^{\mathrm{T}}(s)Wx(s)ds
\end{aligned} \tag{9}$$

其中 $\bar{A}$ 及 $\bar{B}$ 定義於(6c)式。

引用補助定理一，並令 $P \le \alpha I$，則可得

$$\begin{aligned}
LV(x_t) &\le \int_{t-\tau}^{t} \frac{1}{\tau}\{x^{\mathrm{T}}(t)\,[\bar{A}^{T}P + P\bar{A} + P(\beta_1^{-1}+\beta_2^{-1})P \\
&\qquad + (\beta_1+\tau\beta_3)K_1^{\mathrm{T}}K_1 + \alpha K_3^{\mathrm{T}}K_3 + Q_1 + \tau W]x(t) \\
&\qquad + 2x^{\mathrm{T}}(t)P\bar{B}x(t-\tau) + 2\tau x^{\mathrm{T}}(s)E^{\mathrm{T}}P\bar{A}\,x(t) \\
&\quad + 2\tau x^{\mathrm{T}}(s)E^{\mathrm{T}}P\,\bar{B}\,x(t-\tau) \\
&\quad - x^{\mathrm{T}}(t-\rho_1\tau)\,[Q_1-Q_2]\,x(t-\rho_1\tau) \\
&\quad - x^{\mathrm{T}}(t-\rho_2\tau)\,[Q_2-Q_3]\,x(t-\rho_2\tau) \\
&\quad - x^{\mathrm{T}}(t-\rho_3\tau)\,[Q_3-Q_4]\,x(t-\rho_3\tau) \\
&\quad - x^{\mathrm{T}}(t-\rho_4\tau)\,[Q_4-Q_5]\,x(t-\rho_4\tau) \\
&\quad - x^{\mathrm{T}}(t-\tau)[Q_5-\beta_2K_2^{\mathrm{T}}K_2-\alpha K_4^{\mathrm{T}}K_4-\tau\beta_4K_2^{\mathrm{T}}K_2]x(t-\tau) \\
&\quad - x^{\mathrm{T}}(s)\,[\tau W - \tau E^{\mathrm{T}}P(\beta_3^{-1}+\beta_4^{-1})PE]x(s)ds\} \\
&= \int_{t-\tau}^{t} \frac{1}{\tau}\varpi^{\mathrm{T}}(t,s)\,\Phi\,\varpi(t,s)ds
\end{aligned} \tag{10}$$

其中

$$\begin{aligned}
\varpi^{\mathrm{T}}(t,s) = [&x^{\mathrm{T}}(t)\ x^{\mathrm{T}}(t-\rho_1\tau)\ x^{\mathrm{T}}(t-\rho_2\tau)\ x^{\mathrm{T}}(t-\rho_3\tau) \\
&x^{\mathrm{T}}(t-\rho_4\tau)\ x^{\mathrm{T}}(t-\tau)\ x^{\mathrm{T}}(s)]
\end{aligned} \tag{11a}$$

$$\Phi = \left[\begin{matrix}
\begin{matrix}\bar{A}^{\mathrm{T}}P+P\bar{A}+Q_1+\tau W+\alpha K_3^{\mathrm{T}}K_3 \\ +(\beta_1+\tau\beta_3)K_1^{\mathrm{T}}K_1+P(\beta_1^{-1}+\beta_2^{-1})P\end{matrix} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -Q_1+Q_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -Q_2+Q_3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -Q_3+Q_4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -Q_4+Q_5 \\
\bar{B}^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\tau E^{\mathrm{T}}P\bar{A} & 0 & 0 & 0 & 0
\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} P\bar{B} & \tau\bar{A}^{\mathrm{T}}PE \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -Q_2+\beta_2K_2^{\mathrm{T}}K_2+\alpha K_4^{\mathrm{T}}K_4+\tau\beta_4K_2^{\mathrm{T}}K_2 & \tau\bar{B}^{\mathrm{T}}PE \\ \tau E^{\mathrm{T}}P\bar{B} & -\tau W+\tau E^{\mathrm{T}}P(\beta_3^{-1}+\beta_4^{-1})PE \end{matrix}\right] \tag{11b}$$

由上述分析得知，若 $\Phi<0$ 成立，則 $LV(x_t)<0$。再者，藉由 Schur complement 觀念，若(5a)式成立，則 $\Phi<0$。引用(5b)式及補助定理二，則也證實 $D(x_t)$ 為穩定。最後，根據文獻[4]之類似分析法，可確定系統(1)式為均方強健指數穩定。故得證。

## 3. 例題說明

**例題一**

考慮中立型隨機雜訊非線性擾動延遲系統如下

$$d[x(t)-Gx(t-\tau)]=[(A+\Delta A(t))x(t)+(B+\Delta B(t))x(t-\tau)]dt +g(t,\, x(t),\, x(t-\tau))dw(t) \tag{12}$$

其中

$$G=\begin{bmatrix}0.3 & 0\\ 0 & 0.5\end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -0.5 & -1\end{bmatrix} \tag{13a}$$

$$\|\Delta A(t)\|\le 0.5,\quad \|\Delta B(t)\|\le 0.2 \tag{13b}$$

$$\mathrm{Trace}[g^{\mathrm{T}}(t,x(t),x(t-\tau))\; g(t,x(t),x(t-\tau))] \le 0.1\|x(t)\|^2+0.2\|x(t-\tau)\|^2 \tag{13c}$$

本問題是系統(12)式仍保持均方強健指數穩定情況下，能容許多大之時間延遲量$\tau$。

**解**

引用本文之定理一及 MATLAB LMI Toolbox 軟體，求得當$\tau<2.5196$，則保證系統(12)式為均方強健指數穩定。

再者，利用文獻[5]之方法，求得當$\tau<0.9573$，則保證系統(12)式為均方強健指數穩定。因此，本文之定理一的結果較優於文獻[5]的結果。

**例題二**

考慮遲滯型隨機雜訊非線性擾動延遲系統如下

$$dx(t)=[Ax(t)+Bx(t-\tau)]dt+g(t,\, x(t),\, x(t-\tau))dw(t) \tag{14}$$

其中

$$A=\begin{bmatrix}-5 & 0\\ 0 & -9\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0.1 & 0\\ 0.2 & -0.5\end{bmatrix} \tag{15a}$$

$$\mathrm{Trace}[g^{\mathrm{T}}(t,x(t),x(t-\tau))\; g(t,x(t),x(t-\tau))] \le 0.5\|x(t)\|^2+0.1\|x(t-\tau)\|^2 \tag{15b}$$

本問題是系統(14)式仍保持均方強健指數穩定情況下，能容許多大之時間延遲量$\tau$。

**解**

引用本文之定理一及 MATLAB LMI Toolbox 軟體，求得當$\tau<2.9385$，則保證系統(14)式為均方強健指數穩定。

再者，利用文獻[6,7,8]之方法，分別求得當$\tau<1.0731$，$\tau<1.2837$，$\tau<1.5926$，則保證系統(14)式為均方強健指數穩定。因此，本文之定理一的結果較優於文獻[6,7,8]的結果。

## 4. 結論

傳統 Lyapunov 函數方法常使用於目前文獻中，但如此一來，增加對中立型隨機雜訊非線性擾動延遲系統之延遲相關或延遲獨立穩定準則之保守性，並且推導過程較為冗長。因此，本文引用新型 Lyapunov-Krasoskii 泛函數方法來改善傳統 Lyapunov 函數的缺點。

本方法的優點可歸納如下：

(一)適當選取李亞普諾-克羅斯威斯基泛函數可獲得系統穩定的最大時間延遲量。

(二)改善目前文獻之延遲相關穩定條件。

## 5. 參考文獻

[1] P. P. Khargonekar, I. R. Petersen, and K. Zhou, “Robust stabilization of uncertain linear systems: Quadratic stabilizability and $H_\infty$ control theory,” *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 35, pp. 356-361, 1990.

[2] S. I. Niculescu, “On delay-dependent stability under model transformations of some neutral linear systems,” *Int. J. Control*, vol. 74, pp. 609-617, 2001.

[3] X. X. Liao and X. Mao, “Exponential stability of stochastic delay interval systems,” *Systems & Control Letters*, vol. 40, pp. 171-181, 2000.

[4] X. Mao, “Robustness of exponential stability of stochastic differential delay equation,” *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 41, pp. 442-447, 1996.

[5] W. H. Chen, W. X. Zheng, and Y. Shen, “Delay-dependent stochastic stability and $H_\infty$ -Control of uncertain neutral stochastic systems with time delay, ” *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 54, pp. 1660-1667, 2009.

[6] D. Yue and Q. L. Han, “Delay-dependent exponential stability of stochastic systems with time-varying delay, nonlinearity, and Markovian switching,” *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 50, pp. 217-222, 2005.

[7] M. Hua, F. Deng, X. Liu, and Y. Peng, “Robust delay-dependent exponential stability of uncertain stochastic system with time-varying delay,” *Circuits, Systems, and Signal Processing*, vol. 29, pp. 515-526, 2010.

[8] W. Qian and L. Chen, “Robust stability of stochastic systems with time-delay and nonlinear uncertainties,” *Lecture Notes in Electrical Engineering*, vol. 138, pp. 229-237, 2012.